

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 10

1. *Satz von Fubini.* Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume. Dann ist eine Funktion $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ genau dann $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbar, wenn die Funktion

$$\left(x_1 \mapsto \int_{X_2} |f(x_1, \cdot)| d\mu_2 \right) \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$$

μ_1 -integrierbar ist. In diesem Fall

- (i) sind die Funktionen $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X_2, \mathcal{A}_2)$ für μ_1 -f.a. $x_1 \in X_1$ μ_2 -integrierbar,
- (ii) ist die μ_1 -f.ü. definierte messbare Funktion

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$$

μ_1 -integrierbar,

(iii) und es gilt

$$\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1).$$

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung bewiesene Version des Satzes von Fubini für nichtnegative numerische Funktionen.

- (iv) Sei $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = ([0, 1], \mathcal{B}^1, \beta^1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = ([0, 1], \mathcal{P}([0, 1]), \zeta)$, wobei ζ das Zählmaß bezeichnet. Sei weiter $\Delta = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\} \subset X_1 \times X_2$ die Diagonale. Zeigen Sie, dass

$$\int_{X_2} \left(\int_{X_1} \chi_{\Delta} d\beta^1 \right) d\zeta = 0, \quad \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_{\Delta} d\zeta \right) d\beta^1 = 1.$$

und $(\beta^1 \boxtimes \zeta)^*(\Delta) = \infty$. Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

2. (i) *Volumen von Kegeln.* Wir zerlegen $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ für $d \geq 2$. Für eine Borel-Menge $B \subset \mathbb{R}^{d-1} \cong \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ und $h > 0$ betrachten wir den Kegel $K \subset \mathbb{R}^d$ mit Basis B , Höhe h und Spitze $p \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{h\}$.

Dann ist K eine Borel-Menge und ihr Volumen ist gegeben durch

$$\beta^d(K) = \frac{1}{d} \beta^{d-1}(B) h.$$

- (ii) *Bestimmung des Kugelvolumens nach Archimedes.* Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den Zylinder $Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$, die Halbkugel $H = \{(x, y, z) \mid x^2 +$

$y^2 + z^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 1$ sowie den Kegel $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$. Zeigen Sie, dass für die Flächen ihrer Querschnitte auf der Höhe $\zeta \in [0, 1]$ gilt, dass

$$\lambda^2(Z_\zeta) = \lambda^2(H_\zeta) + \lambda^2(K_\zeta).$$

Hier bezeichnen wir mit $M_\zeta \subset \mathbb{R}^2$ den Querschnitt einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ in xy -Richtung auf der Höhe ζ , also $M \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\zeta\}) =: M_\zeta \times \{\zeta\}$.

Folgern Sie mit dem Cavalierischen Prinzip, dass

$$\lambda^3(Z) = \lambda^3(H) + \lambda^3(K)$$

für die Volumina, dh die Volumina von Zylinder, Halbkugel und Kegel verhalten sich wie 3:2:1.

Bestimmen Sie das euklidische Volumen des Einheitsballs in $\mathbb{R}^3$.

(iii) *Volumen euklidischer Bälle.* Es bezeichne v_d das Volumen des d -dim euklidischen Einheitsballs $B^d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|^2 \leq 1\}$. Beweisen Sie mit Hilfe der Produktdarstellung des Lebesgue-Maßes (bzgl der Zerlegung $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$) die Rekursionsformel

$$v_d = v_{d-1} \cdot I_d$$

für $d \geq 2$, wobei

$$I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d u \, du.$$

Folgern Sie, dass

$$\frac{v_d}{v_{d-2}} = \frac{2\pi}{d}$$

und berechnen Sie v_d für $d \leq 4$.

3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(i) Für $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ ist $f\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ gegeben durch

$$(f\mu)(A) := \int_A f \, d\mu$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$, das sogenannte Maß mit der *Dichte* f bezüglich μ .

Bemerkung: Wir verwenden hier die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

(ii) Jede μ -Nullmenge ist auch eine $f\mu$ -Nullmenge. (Man sagt, $f\mu$ ist *stetig* bzgl μ .)

(iii) Für $f, g \in \mathcal{M}_{[0, \infty]}(X, \mathcal{A})$ gilt

$$\int_X f \, d(g\mu) = \int_X fg \, d\mu.$$

(iv) Für die Radiusfunktion $r : \mathbb{R}^2 \mapsto [0, \infty)$ definiert durch $r(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$ gilt

$$r_*\beta^2 = 2\pi r \beta_{|[0, \infty)}^1.$$

Wenn Sie Ihre Übungen bis Freitag dem 12.1.2024 um 16:00 Uhr in Moodle einreichen, versuchen wir Ihnen zu möglichst vielen Ihrer Abgaben eine Rückmeldung zu geben. Bitte benennen Sie die Datei als B10_Name1_Name2, wenn Sie z.B. zu zweit abgeben, wobei Name1 der Nachname der einreichenden Person sein sollte.

A7 (i)-(iv)

Die Äquivalenz (der Integrierbarkeit) folgt sofort aus dem Satz von Fub für nichtneg Funktionen angewandt auf $|f| \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Die Funktionen $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(X_2, \mathcal{A}_2)$ sind für μ_1 -fast alle $x_1 \in X_1$ μ_2 -integrierbar und die μ_1 -f.ü. definierte messbare Fkt $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$ ist μ_1 -integrierbar.

Die Endl. von $\int_{X_1} \int_{X_2} |f| d\mu_1 d\mu_2$ impliziert, dass $\int_{X_2} |f(x_1, \cdot)| d\mu_2 < \infty$ für fast alle $x_1 \in X_1$.

Die Menge $N = \{x_1 \in X_1 : \int_{X_2} |f(x_1, \cdot)| d\mu_2 = +\infty\}$.

Da $(x_1 \mapsto \int_{X_2} f^+(x_1, \cdot) d\mu_2), (x_1 \mapsto \int_{X_2} f^-(x_1, \cdot) d\mu_2) \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1, \mathcal{A}_1)$ folgt die Messbarkeit von $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$, $x_1 \mapsto \int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2$ (*)

Ansichts $\int_{X_1 \setminus N} |\int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2| d\mu_1(x_1) \leq \int_{X_1 \setminus N} \int_{X_2} |f| d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) = \int_{X_1} \int_{X_2} |f| d\mu_2(x_2) d\mu_1(x_1) < \infty$ ist (*) μ_1 -integrierbar. Fubini für nicht-neg. Fktn

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } \int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &\stackrel{\text{Def}}{=} \int_{X_1 \times X_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} f^- d(\mu_1 \otimes \mu_2) \stackrel{!}{=} \int_{X_1} \int_{X_2} f^+ d\mu_2 d\mu_1 - \int_{X_1} \int_{X_2} f^- d\mu_2 d\mu_1 \\ &\stackrel{N \text{ Nullm.}}{=} \int_{X_1 \setminus N} \int_{X_2} f^+ d\mu_2 d\mu_1 - \int_{X_1 \setminus N} \int_{X_2} f^- d\mu_2 d\mu_1 = \int_{X_1 \setminus N} \int_{X_2} f d\mu_2 d\mu_1 \\ &= \int_{X_1} \int_{X_2} f d\mu_2 d\mu_1 \end{aligned}$$

(iv) Sei $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \beta')$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2) = ([0,1], \mathcal{P}([0,1]), \zeta)$. Zählmaß

$\Delta \in X_1 \times X_2$ Sei die Diagonale $\Delta = d^{-1}(0)$, wobei $d: [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{\text{Stetig}} [0,+\infty], (x,y) \mapsto |x-y|$.
 $\mathcal{B}([0,1]^2) = \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{B}([0,1]) \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \chi_\Delta \in \mathcal{M}_{[0,\infty]}(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

Es ist für $(t,s) \in [0,1]^2$ $\chi_\Delta(t,s) = \chi_{\{t,s\}}(s) = \chi_{\{t,s\}}(t)$, also $\int_{X_1} \chi_\Delta(t,s) d\beta'(t) = \int_{X_1} \chi_{\{t,s\}}(t) d\beta'(t) = \beta'(\{t,s\}) = 0$ für so $[0,1]$. Weiter ist $\int_{X_1} \int_{X_2} \underbrace{\chi_{\{t,s\}}(s) d\zeta(s)}_{\zeta(\{s\})=1} d\beta'(t) = \beta'([0,1]) = 1$.

Kein Widerspruch zum Satz von Fubini, da $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ nicht σ -endl. ist. (Da $[0,1]$ überabz. ist, folgt aus $[0,1] \subseteq \bigcup_n B_n$ mit $B_n \in \mathcal{A}_2$, dass B_n überabz. für ein $n \Rightarrow \zeta(B_n) = +\infty$ für ein n)
 $(\beta' \otimes \zeta)^*(\Delta) = +\infty$. Sei $\Delta \subseteq \bigcup_n (A_n \times B_n)$ mit $A_n \in \mathcal{A}_1, B_n \in \mathcal{A}_2$.

Definiere $I := \{n \in \mathbb{N} : \beta'(A_n) = 0\}$ und betrachte $B := [0,1] \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann ist $\beta'(B) = \beta'([0,1]) = 1$ und damit B überabzählbar.

Betrachte $B' = [0,1] \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$. Dann ist $\beta'(B) = 1$, also B überabz.

Mit $(B \times B) \cap \Delta \subseteq \bigcup_{n \in I} A_n \times B_n$ folgt $B \subseteq \bigcup_{n \in I} B_n$, also $\zeta(B_n) = +\infty$ für $n \notin I$.

Sei $\pi_2: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ die Projektion auf die zweite Komponente. Dann ist

$$B = \pi_2((B \times B) \cap \Delta) \subseteq \pi_2(\bigcup_n A_n \times B_n) = \bigcup_n B_n.$$

A2 (Volumen von Kegeln)

Es sei $d \geq 2$ und $B \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ eine Borel-Menge. Definiere $K(B) := \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} (1-\lambda)B + \lambda p$
 $p \in \mathbb{R}^{d-1} = \{h\}$, $h > 0$

Für $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{d-1} \times [0, h]$ gilt: $z \in K(B) \iff (x, t) = (1-\lambda)(b, 0) + \lambda p$ mit $\lambda = \frac{t}{h}$ für ein $b \in B$
 $\iff f(x, t) \in B \cup \{0\}$, wobei $f: \mathbb{R}^{d-1} \times [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^{d-1} \cup \{0\}$, $(x, t) \mapsto \frac{1}{(1-t/h)}((x, t) - \frac{t}{h}p)$ stetig
 $\Rightarrow K(B) = f^{-1}(B \cup \{0\}) \in \mathcal{B}^d$.
 $\Rightarrow \hat{\kappa}(B) \in \mathcal{B}^d$

Alternativ: Zeige $K := \{B \in \mathcal{B}^{d-1} : K(B) \in \mathcal{B}^d\}$ ist eine σ -Alg
 und K enthält Erzeugen von $\mathcal{B}^{d-1}$ als σ -Alg

Nach Cavalieri ist $[0, h] \rightarrow [0, +\infty)$, $t \mapsto \beta^{d-1}(K_t) = \beta^{d-1}((1-\frac{t}{h})B) = (1-\frac{t}{h})^{d-1} \beta^{d-1}(B)$
 messbar und $\beta^d(K) = (\beta^{d-1} \otimes \beta)(K) = \int_0^h (1-\frac{t}{h})^{d-1} dt \beta^{d-1}(B) = \int_0^h (1-\frac{t}{h})^{d-1} \beta^{d-1}(B) dt$
 $= \int_0^h \underbrace{\left(\frac{d}{ds} s^d\right)}_{= s^d \Big|_0^h} ds \beta^{d-1}(B) h - \frac{1}{d} = \frac{1}{d} \beta^{d-1}(B) h$
 stetig $\Rightarrow$ Lebesgueintegral stimmt mit Riemannint überein.

(iii) (Kugelvolumen und Archimedes)

Es sei $z = D \times [0, 1]$, $M = \overline{B}_1(0) \cap \{z \geq 0\}$, $K = \hat{\kappa}(D)$. Dann ist $z_C = D$, $M_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1-\xi^2}\} = \sqrt{1-\xi^2} D$
 für $\xi \in [0, 1]$. $K_\xi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \xi\} = \xi D$.
 Folglich ist $\lambda^2(z) = \lambda^2(D) = \underbrace{(1-\xi^2) \lambda^2(D)}_{= \lambda^2(\sqrt{1-\xi^2} D)} + \underbrace{\xi^2 \lambda^2(D)}_{= \lambda^2(\xi D)} = \lambda^2(M_C) + \lambda^2(K_\xi)$

Translationsinvarianz, Cavalieri

$$\Rightarrow \lambda^3(z) = \lambda^3(M) + \lambda^3(K)$$

$$\text{Mit } \lambda^2(D) = \pi \text{ und } \lambda^3(B) = 2\lambda^3(M) = 2\lambda^3(D)(1-\frac{\xi}{2}) = \frac{4}{3}\pi$$

$$\lambda^3(z) = \lambda^3(D), \lambda^3(K) = \frac{1}{3}\lambda^3(D)$$

(iii) Es sei $B^d := \overline{B}_1(0) \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$v_d := \beta^d(B^d) \quad \cap \quad \mathcal{B}^d = \mathcal{B}^{d-1} \otimes \mathcal{B}$$

Dann gilt für $d \geq 2$ $v_d = v_{d-1} \cdot I_d$, wobei $I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d u \, du$.

Es ist $(B^d)_h = \overline{B}_{\sqrt{1-h^2}}^{d-1}(0) = \sqrt{1-h^2} B^{d-1}$ für $h \in [-1, 1]$ und

$$B^d_h = \emptyset \text{ sonst.} \quad \beta^{d-1}(\sqrt{1-h^2} B^{d-1}) = (1-h^2)^{\frac{d-1}{2}} \beta^{d-1}(B^{d-1})$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri und der Stetigkeit von $\cdot$ folgt

$$v_d = v_{d-1} \int_{-1}^1 (1-h^2)^{\frac{d-1}{2}} dh = v_{d-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^d u \, du \cdot \frac{v_d}{v_{d-1}} = \frac{2\pi}{d}$$

$$dI_d = (d-1)I_{d-2} \quad (\text{für } d \geq 2)$$

$$I_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^d u \, du}{\cos^{d-1} u \cdot (\sin u)' du} = \cos^{d-1} u \sin u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (d-1) \cos^{d-2} u \cdot \underbrace{\sin^2 u}_{= (1-\cos^2 u)} du$$

$$= (d-1)(I_{d-2} - I_d) \Rightarrow dI_d = (d-1)I_{d-2}.$$

Es folgt mit Induktion $I_d I_{d-1} = I_{d-1} I_{d-2} \frac{d-1}{d} = \dots = \frac{1}{d} I_1 I_0$

$$I_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \, du = \pi \text{ und } I_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos u}_{=\sin u} \, du = \sin u \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

$$\text{Es folgt } \frac{v_d}{v_{d-2}} = \frac{v_{d-1} I_d}{v_{d-2}} = \frac{v_{d-2} I_d I_{d-1}}{v_{d-2}} = I_d I_{d-1} = \frac{2\pi}{d}.$$

$$v_1 = \beta([-1, 1]) = 2, \quad v_2 = v_1 \cdot I_2 = v_1 \frac{1}{2} I_0 = \pi$$

$$v_3 = v_1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}, \quad v_4 = v_2 \cdot \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2} \pi^2$$

AB (Maße mit Dichten)

(i) Für $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}(X, \mathcal{A})$ definiert $(f_\mu)(A) := \int_A f \, d\mu$ für $A \in \mathcal{A}$ ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$

$$\text{klar: } (f_\mu)(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ist } (A_n)_n \text{ eine Folge p.w. disjunkter Mengen aus } \mathcal{A} \text{ so ist } (f_\mu)(\cup_n A_n) &= \int_{\cup_n A_n} f \, d\mu = \int_X f \cdot \chi_{\cup_n A_n} \, d\mu \\ &= \sum_n \int f \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_n \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_n (f_\mu)(A_n) = (f_\mu)(\cup_n A_n) \end{aligned}$$

(ii) Ist $\mu(N) = 0$ für $N \in \mathcal{A}$ so auch $(f_\mu)(N) = 0$, kurz $f_\mu \ll \mu$

$$\text{Sei } N \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(N) = 0. \text{ Dann ist } (f_\mu)(N) = \int_N f \, d\mu \leq \int_N \infty \, d\mu = (\mu \otimes \beta^*) (N \times (0, \infty)) = 0$$

$$\underbrace{\mu(N) \cdot (0, \infty)}_0$$

$\nu \leq \mu$ σ -endl Maße auf $(X, \mathcal{A})$.

$$\text{Dann auch } f \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}(X, \mathcal{A}) \text{ mit } \nu(A) = \int_A f \, d\mu$$

$$\text{(iii) Für } A \in \mathcal{A} \text{ ist } \int_X \chi_A \, d(g_\mu) = \int_A d(g_\mu) = (g_\mu)(A) = \int_A g \, d\mu = \int_X \chi_A g \, d\mu$$

Mit Linearität bei den Seiten folgern wir $\int_X \tau \, d(g_\mu) = \int_X \tau g \, d\mu$ für alle $\tau \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}(X, \mathcal{A})$ Treppenfkt.

Soll man Monotonie $\Rightarrow$ gilt für bei $f \in \mathcal{M}_{[0, \infty)}(X, \mathcal{A})$

(iv) Für die Radiusfkt $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ gilt $r_* \beta^2 = 2\pi \text{id}_{[0, \infty)}$.

$$\text{Es sei } s_{d-1} := dv_d. \text{ Wir zeigen, dass allg. } \nu_r \beta^d = s_{d-1} \text{id}_{[0, \infty)} \beta^d_{[0, \infty)}$$

$$\text{Beide Seiten sind } \sigma\text{-endl Maße auf } \mathcal{B}([0, \infty)), \text{ also genügt es z.z.: } r_* \beta^d([t, T]) = \int_t^T s_{d-1} \, ds \text{ für}$$

$$0 < t < T < \infty. \text{ Es ist } r_* \beta^d([t, T]) = \beta^d \left(\underbrace{\bar{B}_t}_{\substack{+ B_1}} \right) = \underbrace{(T^d - t^d)}_{s_d|_t^T} \nu_d = \nu_d \underbrace{d \int_t^T s^{d-1} \, ds}_{= s_{d-1} \int_t^T s^{d-1} \, ds} = s_{d-1} \int_t^T s^{d-1} \, ds.$$